Correction du TD 1
Analyse dimensionelle et ordres de grandeurs
Cinématique, dérivées et différentielles.

Marc Bailly-Bechet

51PH1ME1-A – Mécanique Physique A – Université Paris 7

1 Equations aux dimensions

Sur les premìeres il n'y a pas de méthode pour trouver, c'est juste un panorama d'unités étranges mais dont il ont normalement déjà entendu parler. Et dont ils devraient connaître les dimensions! (alors que la valeur, sans Google...)
Une année-lumière = 9,46.10^{15}m $\rightarrow L$

Un hectare= 10 000 m^2 $\rightarrow L^2$

Un cheval-vapeur= 736 W $\rightarrow ML^2T^{-3}$ (C'est la puissance développée par un cheval qui monte une charge de 75 kgs au pas)

Un mile nautique= 1852m $\rightarrow L$

Sur les suivants, on peut leur présenter formellement les solutions, en résolvant l'équation aux dimensions (et en leur montrant que ca revient à équilibrer les unités des deux cotés.)

[Vitesse] $= LT^{-1}$ avec $v = \frac{d}{t}$

[Accélération] $= LT^{-2}$; dérivée de la précédente

[Energie] $= ML^2T^{-2}$ avec $E = \frac{1}{2}mv^2$

[Puissance] $= ML^2T^{-3}$; dérivée de la précédente

[Force] $= MLT^{-2}$ avec $F = ma$

[g] $= LT^{-2}$ avec $F = P = mg$

[G] $= M^{-1}L^3T^{-2}$ avec $F = G\frac{m^2}{r^2}$

2 Analyse dimensionnelle : le pendule

Les seuls paramètres du problème sont l, m et g. La tension du fil n'intervient pas, ca on sait qu'elle est directement reliée à mg : elle compense simplement le poids.

On résoud l'équation aux dimensions:

$$T = L^\alpha M^\beta (L.T^{-2})^\gamma$$

donc

$$\beta = 0,\ \alpha + \gamma = 0,\ -2\gamma = 1$$

$$\beta = 0,\ \gamma = \frac{-1}{2},\ \alpha = \frac{1}{2}$$

La seule grandeur proportionnelle à un temps est $\sqrt{\frac{l}{g}}$. Donc un pendule deux fois plus long aura une période $\sqrt{2}$ fois plus longue, et $\sqrt{n}$ fois plus longue pour un pendule n fois plus long.

3 Ordres de grandeurs

Estimez le nombre de personnes que l'on peut placer dans la tribune d'un stade de football, sachant que le terrain mesure 100m x 75m.

Si le terrain mesure 100 x 75m, on peut estimer la taille de la tribune à 100 x 37.5m par exemple pour que les spectateurs du fond ne soient pas beaucoup plus loin du terrain que ceux de devant. On a donc une surface de 3750 m^2; à raison de 3 personnes par m^2, on obtient environ 10 000 places.

Une manifestation a été mesurée comme faisant 2 km de long. Estimez le nombre de personnes qui y participaient.

Une double voie classique fait 6 m (2x3) de large; on a donc une surface de 6 x 2000 = 12 000 m^2 occupée par la manifestation. Avec le même ordre de grandeur que précédemment pour la densité (2 à 3 personnes par m^2) on trouve environ 30 000 personnes.

$\star$ *Estimez le nombre d'atomes dans un morceau de craie (voir les valeurs numériques à la fin de l'exercice). Comparez à la population terrestre.*

Poids de la craie : environ 100g. Donc on a 5 moles dans une craie, soit 5 fois $6,02.10^{23}$ atomes, soit 3.10^{24} atomes. La population terrestre est de l'ordre de 6.10^9 habitants, ce qui est négligeable devant le nombre d'atomes d'une craie. Eventuellement leur demander quel pourcentage ca fait, pour vérifier s'ils réalisent ce que 10^{-15} représente…

$\star$ *Une dinde de 1,5 kg est bien cuite en son centre après 20 minutes au four. Estimez le temps nécéssaire pour obtenir le même résultat sur une dinde deux fois plus lourde.*

On suppose qu'il faut 20 minutes à la chaleur pour passer de la peau au coeur de la dinde, soit l. Dans une dinde deux fois plus lourde, la distance à parcourir est $2^{\frac{1}{3}}l$, soit $1,26l$. Le temps de cuisson est donc 1,26 fois plus long.

$\star$ *Sachant qu'environ* 2^{40} *cellules vous composent, estimez l'ordre de grandeur de la taille d'une cellule. Sachant que la racine de chacun de vos cheveux est unicellulaire, combien de cheveux avez-vous sur la tête?*

On estime le nombre de cellules dans un être humain adulte en connaissant le nombre de divisions effectuées depuis le stade 1 cellule, dont les estimations varient entre 38 et 40 divisions.

Un humain est un parallélépipède d'environ 0.75m x 1.75m x 0.2m, donc de volume $\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{1}{5} \simeq 0,25\text{m}^3$. On a donc $V_{cell} = V_{humain}.2^{-40} \simeq 0,25.(10^3)^{-4} \simeq 0,25.10^{-12}\text{m}^3$.

Donc $L_{cell} = V_{cell}^{\frac{1}{3}} \simeq 10^{-4}\text{m}$. La taille réelle est comprise entre 10^{-5} et 10^{-4}m.

Surface du cuir chevelu : $S_{cheveux} = 1$ ou 2 $\text{dm}^2 \simeq 10^{-2}m^2$

Surface occupée par une cellule : $S_{cell} = L_{cell}^2 \simeq 10^{-8}m^2$.

Nous avons donc $\frac{S_{cheveux}}{S_{cell}} \simeq 10^6$ cheveux sur la tête.

4 Dérivées et différentielles

4.1 Remise en route

Je propose de garder les notations de terminale avec des f'(x) pour cet exo, le but étant juste de les faire calculer, pas d'introduire la notation $\frac{d}{dx}$ (exo suivant)

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\frac{1}{x^n})' = \frac{-1}{x^{n+1}}$; leur montrer l'équivalence de faire $(\frac{1}{x^n})' = (\frac{1}{f(x)})' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; leur montrer que l'on peut aussi le faire comme au dessus avec $x^{1/2}$ (la formule précédente est apprise par coeur en teminale sans démo je crois). Eventuellement retrouver $\sqrt{x} = x^{1/2}$ en posant $(x^{1/2})^2 = x = (\sqrt{x})^2$
- $(ln(4x+3))' = \frac{4}{4x+3}$
- $(\exp(-2x+3))' = -2\exp(-2x+3)$
- $(\cos(4x-2))' = -4\sin(4x-2)$

4.2 Un peu de mathématiques

Quelle est la signification physique de la dérivée? Que représente, dans cette écriture, le numérateur? Le dénominateur? Pourquoi prend-on la limite $h \to 0$?

Signification physique: coeff. dir. d'une approximation linéaire d'une fonction en un point (sa tangente). Coeff dir $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (faire un schéma). On prend la limite pour avoir le droit de faire une approximation linéaire ponctuelle, et pas juste calculer l'accroissement moyen de la fonction sur un grand Δx.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

.

Sachant que cette écriture est la même que celle vue ci-dessus, que représentent les facteurs df et dx? Quelle condition doit on respecter pour que les deux écritures représentent la même chose?

Reprendre le schéma précédent et noter les nouvelles notations dessus. dx est le dénominateur, donc le h de la notation précédente. C'est l'accroissement infinitésimal de la variable. df est le numérateur, donc le Δy de la notation précédente. C'est l'accroissement infinitésimal de la valeur de la fonction pour un petit accroissement de x, donc la différentielle.

$\star$ *A l'aide de la formule donnée plus haut et de formules trigonométriques connues retrouvez la dérivée de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$.

$$(\sin(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)-\sin(x)\sin(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x)$$

Pour justifier les simplifications on a $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$ et $lim_{h\to 0}\cos(h) = 1$.

4.3 Attention aux notations

Ici on introduit la notation $\frac{d}{dx}$, et on leur montre par la même comment calculer la différentielle.

1. $\frac{df}{dx} = \frac{d\,e^x}{dx} = e^x$ donc $df = e^x dx$.
2. $\frac{dg}{dt} = \frac{d\,e^{t+\phi}}{dt} = e^{t+\phi}$ donc $dg = e^{t+\phi}dt$.
3. $\frac{dh}{dt} = \frac{d\,\pi^{3\phi+4t}}{dt} = \frac{d(3\phi+4t)}{dt}\frac{d(\pi^{3\phi+4t})}{d(3\phi+4t)} = 4\pi^{3\phi+4t}$ donc $dh = 4\pi^{3\phi+4t}dt$. Insister sur le fait que dériver π^x et e^x est strictement la même chose, i.e que e est un nombre comme les autres... Faire également le lien avec la formule de dérivation des fonctions composées qu'ils ont peut-être vue : $(g\circ f)'(x) = f'(x)(g'\circ f)(x)$
4. $\frac{dk}{dx} = \frac{d(x^{yt+\phi})}{dx} = (yt+\phi)x^{yt+\phi-1}$ et $\frac{dk}{dt} = \frac{d(x^{yt+\phi})}{dt} = \frac{d(yt+\phi)}{dt}\frac{d(x^{yt+\phi})}{d(yt+\phi)} = yx^{yt+\phi}$. Donc $dk = (yt+\phi)x^{yt+\phi-1}dx + yx^{yt+\phi}dt$.

5 Intégrales

Faire le lien entre la notation de la variable d'intégration dx et la notation différentielle ci dessus : $f(b) - f(a) = \int_a^b df = \int_a^b \frac{df}{dx} dx$ et la signification physique de sommation de l'intégrale.

1. $\int_0^5 x^2\, dx = [\frac{x^3}{3}]_0^5 = 125$.
2. $\int_0^\pi \sin(\omega t)\, dt = [-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}]_0^\pi = \frac{1}{\omega}(1 - \cos(\omega\pi))$.
3. $\int_{\frac{-3}{2}}^0 \sqrt{(2x+3)}\, dx = \int_{\frac{-3}{2}}^0 (2x+3)^{1/2}\, dx = [\frac{2}{3}(2x+3)^{3/2}]_{\frac{-3}{2}}^0 = (-3)^{3/2}$.
4. $\star$ Attention au piège sur la variable d'intégration.
   $\int_0^{100} \frac{x}{ln(x)}\, dy = \frac{x}{ln(x)} \int_0^{100} dy = \frac{x}{ln(x)}\, [y]_0^{100} = 100 \frac{x}{ln(x)}$.
5. $\star$ $\int_0^e ln(S)\, dS$. On procède par intégration par parties :

   $$\int_0^e 1\, ln(S)\, dS = [Sln(S)]_0^e - \int_0^e S \frac{1}{S} dS = [Sln(S) - S]_0^e = 0$$

   car $\lim_{S \to 0} Sln(S) = 0$.

6 Mouvement dans le champ de pesanteur

6.1 Chute libre

Soit une masse m en chute libre dans le champ de gravitation terrestre $\vec{g}$, lachée depuis une hauteur l sans vitesse initiale. On néglige les frottements avec l'air.

1. *Choisissez un référentiel et des coordonnées dans lesquelles l'étude du système sera aisée.* Voir figure 1.

2. *Quelles sont les forces agissant sur la masse? Déduisez-en l'accéleration qu'elle subit.*

   Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ donc avec le PFD $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ on a $\vec{a} = \vec{g}$. Comme on n'est que sur l'axe z, on peut aussi écrire $a_z = -g$ et $a_x = 0$.

3. *Intégrez les équations du mouvement pour obtenir sa vitesse, puis sa position au cours du temps.*

   $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ et $\frac{dv_z}{dt} = a_z$, donc $v_x = v_{0x} = 0$ et $v_z = -gt + v_{0z} = -gt$.
   $\frac{dx}{dt} = v_x$ et $\frac{dz}{dt} = v_z$, donc $x = x_0 = 0$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + l$.

4. *Calculez le temps nécéssaire à la masse pour atteindre le sol. Quelle est sa vitesse à ce moment là?*

   $z = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_{z=0}^2 + l = 0 \Rightarrow t_{z=0}^2 = \frac{2l}{g}$

   $t_{z=0} = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ donc $v_{z=0} = -g\sqrt{\frac{2l}{g}} = -\sqrt{2gl}$

6.2 Mouvement dans le champ de pesanteur avec vitesse initiale

Soit une masse m lancée avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'horizontale depuis une hauteur y_0. Nous allons étudier les caractéristiques du mouvement de ce système, en négligeant les frottements. On se placera dans un référentiel cartésien, avec l'origine O au niveau du sol, à la verticale de l'objet lancé.

1. *Faites un schéma. Dessinez sur ce schéma le vecteur champ de gravitation $\vec{g}$ en 3 points.* Voir figure 2.

2. *A quoi pourrait correspondre ce système modèle, dans la réalité?*

   La trajectoire d'une flèche ou d'un caillou lancé par quelqu'un, mais aussi le saut d'un insecte ou d'un poisson volant, la trajectoire d'une balle de tennis, une voiture qui passe trop vite sur une bosse.

3. *Enumérez les forces agissant sur l'objet, projetez les sur les axes x et y, et déduisez en l'expression de son accéleration sur les mêmes axes.*

   Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ donc $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$.

   Donc $a_y = -g$ et $a_x = 0$.

4. *Intégrez soigneusement l'accélération sur chaque axe pour obtenir la vitesse du mobile, puis sa position, sur chaque axe, en fonction du temps.*

   On a $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ donc $v_y(t) = -gt + v_{0y}$. Or $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$ donc $v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha)$.

   $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ donc $v_x(t) = v_{0x}$. Or $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$ donc $v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$.

   Et $\frac{dy}{dt} = v_y$ donc $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0$

   $\frac{dx}{dt} = v_x$ donc $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + x_0 = v_0 \cos(\alpha)t$

5. $\star$ *Calculez la flèche du mouvement, à savoir la position la plus haute obtenue au cours du temps.*

   y maximum implique $\frac{dy}{dt} = v_y = 0$ qui a lieu à $-gt_F + v_0 \sin(\alpha) = 0$;

   donc $t_F = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

   On a donc ensuite $y_F = -\frac{1}{2}gt_F^2 + v_0 \sin(\alpha)t_F + y_0 = \frac{-1}{2g}v_0^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{g}v_0^2 \sin^2(\alpha) + y_0 = \frac{1}{2g}v_0^2 \sin^2(\alpha) + y_0$.

   On remarque que la flèche est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. $\star$ *Calculez la portée du mouvement, à savoir la distance parcourue sur l'axe des x avant que l'objet ne retombe au niveau du sol. Comment cette formule se simplifie-t-elle si y_0 est nul ou négligeable devant les autres paramètres?*

   $y = 0$ a lieu à $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0 = 0$. C'est un trinôme du second degré, on calcule le discriminant $\Delta = v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0$ et on garde la solution positive qui est

$$t_P = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}}{g}$$

$$x_P = x(t_P) = v_0 \cos(\alpha) t_P = v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}}{g}$$

Quand y_0 est négligeable, on a $t_P = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha)}}{g} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$ et $x_P = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}$

On remarque que $x_p \simeq \sin(2\alpha)$ et est donc maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

7. ⋆ *Calculez la différentielle de la portée en fonction d'un petit accroissement de l'angle $d\alpha$.*

$$\frac{dx_P}{d\alpha} = \frac{d\, v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}}{g}}{d\alpha}$$

$$\frac{dx_P}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}(-\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + \frac{v_0}{g}(-\sin(\alpha)\sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0} + \cos^2(\alpha) \frac{v_0^2 \sin(\alpha)}{\sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}})$$

$$dx_P = \frac{v_0^2}{g}(\cos(2\alpha)) + \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}(\sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0} - \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{\sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}} d\alpha$$

Ce qui se simplifie en $dx_p = \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g}$ quand y_0 est négligeable.

6.3 Analyse dimensionnelle

1. *Exprimez le temps mis par cet objet pour retomber sur terre quand il est lancé verticalement avec une vitesse v_z. L'orientation de v_z (vers le haut ou le bas) change-t-elle le résultat de votre analyse?*

$$T = M^\alpha (L.T^{-1})^\beta (L.T^{-2})^\gamma$$

donc

$$\alpha = 0,\ \beta + \gamma = 0,\ \beta + 2\gamma = -1$$
$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = -1$$

Donc on a $t_{ver} \propto \frac{v_z}{g}$, et bien évidemment le sens de v_z ne change rien, ce qui devrait les surprendre.

2. *Exprimez le temps mis par cet objet pour atteindre le sol à une distance d, s'il est lancé horizontalement avec une vitesse v_x et qu'il suit une trajectoire horizontale.*

$$T = M^{\alpha} L^{\beta} (L.T^{-1}])^{\gamma}$$

donc

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = -1$$

Donc on a $t_{hor} \propto \frac{d}{v_x}$.

3. *L'objet est lancé à présent avec une vitesse $\vec{v}$, selon une inclinaison d'angle α avec l'horizontale. A l'aide des réponses aux deux questions précédentes, exprimez la distance L à laquelle il retombe sur terre, en fonction des paramètres, et en déduire l'inclinaison α optimale pour une portée maximale.*

On remplace d par L dans la formule précédente, et on identifie les deux temps de chute $t_{hor} = t_{ver}$. On a alors $L \propto v_x \frac{v_z}{g}$, ce qui se réécrit en projetant:

$$L \propto v_0^2 \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}$$

Qui donne la bonne loi dans le cas où y_0 est négligeable. D'ailleurs si y_0 était plus important que v_z, c'est lui qu'il aurait fallu inclure dans l'analyse dimensionnelle et on aurait trouvé l'autre limite de la loi de la portée.

Comparez les résultats obtenus par l'analyse dimensionelle à ceux obtenus par le calcul théorique. Quel est l'intérêt de ces résultats? Leur défaut?

Les résultats sont les mêmes, aux constantes numériques près. La méthode peut donc servir pour prévoir la dépendance d'une variable en fonction des différents paramètres du probléme. Mais elle ne donne aps de réponse exacte, surtout dans les cas plus complexes (y_0 non négligeable): elle ne pourrait pas servir en ingénierie ou dans du calcul de précision.

7 Analyse dimensionnelle : langue étrangère

Lors d'un rêve (ou d'un cauchemar), vous passez un examen de physique. Les rêves étant ce qu'ils sont, les lettres de l'énoncé se sont embrouillées et vous ne parvenez pas à le lire. Vous remarquez juste, sous l'énoncé, 3 grandeurs écrites en italique : l=28 m,m=1200 kg *et* v=50 km/h. *La dernière ligne de l'exercice est : F= ... N. Quelle est la réponse que vous écrivez à la place des ... ?*

On procède par analyse dimensionnelle. $[F] = MLT^{-2}$, donc on écrit:

$$MLT^{-2} = M^{\alpha}L^{\beta}(LT^{-1})^{\gamma}$$

de quoi on déduit directement

$$\alpha = 1 \; \gamma = 2 \; \beta = -1$$

Donc $F \propto \frac{mv^2}{l} = \frac{1200\,50^2\,3{,}6^2}{28} = 1,36.10^8$ N.

On n'est pas obligé de transformer les km/h en m/s, de toute façon seul l'ordre de grandeur de la réponse est bon vu qu'il manque les préfacteurs. Le but de l'exo est de leur montrer (même si c'est dangereux) que l'analyse dimensionnelle marche de manière automatique, sans faire d'hypothèses dues à une compréhension du problème qu'ils n'auraient pas.

8 De l'art de naviguer (et de composer les vitesses)

Un bateau traverse une rivière de largeur l, avec la vitesse $\vec{v_b}$ par rapport à l'eau. La vitesse du courant, $\vec{v_c}$, par rapport à la rive, est uniforme et parallèle aux rives.

1. *Faites un schéma.* voir figure 3

2. *Qualitativement, quelle va être la trajectoire du bateau, dans le référentiel des rives? Celui du courant? Dessinez les.*

3. *Quelle est la vitesse du bateau dans chacun des référentiels nommés ci-dessus? La distance parcourue par le bateau?*

   Dans le référentiel des rives: la vitesse du bateau est la somme de la vitesse d'entrainement et de la vitesse propre (relation de Galilée):

$\vec{v_{ref=rives}} = \vec{v_b} + \vec{v_c}$. On a donc $v_{ref=rives} = \sqrt{v_c^2 + v_b^2}$. La distance parcourue est $\frac{l}{\cos(\alpha)}$. Dans le référentiel du courant, la vitesse du bateau n'est plus que sa vitesse propre (reprendre l'exemple classique du voyageur qui marche dans un train s'ils ne voient pas): $\vec{v_{ref=courant}} = \vec{v_b}$. La distance parcourue est l car le bateau voyage perpendiculairement au courant.

4. *Déduisez-en, dans chacun des deux référentiels, le temps mis par le bateau pour traverser la rivière. La réponse vous surprend-elle?*

   Dans le référentiel des rives, on a

$$t_{ref=rives} = \frac{l}{v_{ref=rives}\cos(\alpha)}$$

$$t_{ref=rives} = \frac{l}{\sqrt{v_c^2 + v_b^2}\cos(\alpha)}$$

   Géométriquement on simplifie en

$$t_{ref=rives} = \frac{l}{\sqrt{v_b^2}} = \frac{l}{v_b}$$

   Dans le référentiel du courant, on a directement

$$t_{ref=courant} = \frac{l}{v_b}$$

   .

   Les deux temps sont bien sur les mêmes, en relativité galiléenne l'écoulement du temps est indépendant du référentiel. Ce qui n'est pas vrai dans l'absolu...

5. $\star$ *Pourriez-vous résoudre ce problème sans calculs, grâce à l'analyse dimensionnelle?* Le problème est que, a priori, on ne sait pas quelle vitesse choisir dans les formules: v_c ou v_b. Théoriquement, ce problème n'est donc pas soluble par analyse dimensionnelle de façon simple (je pense qu'il leur faut un exemple comme ca pour leur montrer les limites de l'analyse dimensionnelle). Je ne pense PAS leur présenter la solution sous la forme $t \propto f(\frac{l}{v_c}, \frac{l}{v_b})$, mais on verra à la réunion.

On considère maintenant le même bateau, placé à son point de départ sur la rive. Supposons qu'il veuille rejoindre un embarcadère situé directement en face, sur la rive opposée. La vitesse du bateau est constante et vaut 0,8 m.s^{-1}. La vitesse du courant vaut 0,5 m.s^{-1}.

AJOUT: l=62m.

1. *Qualitativement, quel cap le bateau doit suivre (comment doit etre orienté son vecteur vitesse par rapport à l'eau) pour arriver en face sur la rive opposée? Faites un schéma.*

   Voir figure 4. La vitesse du bateau doit être orientée partiellement contre le courant, pour le compenser.

2. *Calculer l'angle entre la vitesse du bateau et sa trajectoire. Quelle est la vitesse du bateau par rapport aux rives? Combien de temps met-il pour traverser? Comparez avec l'exercice précédent.*

   On doit avoir α tel que $\vec{v_c} + \vec{v_b}\cos(\alpha) = 0$ (pas de vitesse latérale). Donc après projection on trouve $\alpha = \arccos(\frac{v_c}{v_b}) = 0,895$ rad $= 51,3$ degrés.

   On a donc avec Pythagore $v_{ref=rives} = \sqrt{v_b^2 - v_c^2} = \sqrt{0.39} = 0,62$m.s^{-1}. Et $t = \frac{l}{v_{ref=rives}} = \frac{62}{0{,}62} = 100$s soit 1 min 40.

   On pourra remarquer que le temps mis par le bateau est forcément plus grand dans ce cas.

9 Le modèle proton–électron

Considérez le système formé par un électron de charge q_e et de masse m_e tournant autour d'un proton de charge q_p et de masse m_p. On considère ce système isolé. On a $m_e = 9,11.10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67^{-27}$ kg, $q_p = -q_e = 1,60.10^{-19}$ C, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98.10^{-9} m.F^{-1}$, $G = 6,67.10^{-11}$ m^2kg^{-2}.

1. *Faites un schéma.* Voir figure 5.

2. *Quelles sont les forces agissant sur l'électron? Donnez les formules.* Force de gravitation $F_{grav} = G\frac{m_e m_p}{r^2}$ et force électromagnétique $F_{elec} = \frac{q_e q_p}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

3. *On ne tient généralement compte que d'une seule de ces deux forces dans l'étude du mouvement de l'électron. Laquelle?*

   La force électromagnétique.

4. $\star$ *Justifiez votre réponse à la question précédente en comparant l'intensité de ces 2 forces (par exemple en calculant le rapport des deux). Quelle erreur fait-on sur l'accélération de l'électron avec notre approximation? Comparez avec la précision numérique des données de l'énoncé.*

   $$\frac{F_{elec}}{F_{grav}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e q_p}{G m_e m_p} \simeq 10^{-8}\frac{10^{-38}}{10^{-10}10^{-30}10^{-27}} \simeq 10^{19}$$

   Donc on peut comlètement négliger F_{grav}.

   L'accélération de l'électron est de la forme $\frac{(F_{lec}+F_{grav})}{m_e} = \frac{(F_{lec}(1+10^{-19}))}{m_e}$. On fait donc une erreur *RELATIVE de* 10^{-19}*, ce qui est bien inférieur à la précicion des chiffres de l'énoncé, 2 chiffres... Bien leur montrer la différence entre erreur absolue et erreur relative.*

10 Justification du lien entre accélération, vitesse et rayon dans un mouvement circulaire

Considérez un mouvement de rotation uniforme: soit un objet de masse m soumis à une force radiale $\vec{F}$, ayant une vitesse $\vec{v}$ tangentielle, en rotation sur une orbite de rayon r. On suppose que la force $\vec{F}$ (dont on précisera que plus tard la nature) est causée par ue source située au centre O de l'orbite.

1. *Faites un schéma sur lequel vous représenterez l'objet et son orbite, ainsi que la force $\vec{F}$.*

2. *Grâce à l'analyse dimensionnelle, trouvez une relation entre accélération, vitesse et rayon de l'orbite. C'est cette relation que nous allons chercher à démontrer par la suite.*

   $$[a] = LT^{-2}$$

   donc

   $$LT^{-2} = (LT^{-1})^{\alpha} L^{\beta}$$

   qui implique $\alpha = 2\,\beta = -1$ et donc $a \propto \frac{v^2}{r}$.

3. *Si l'objet n'était pas soumis à la force $\vec{F}$, quelle serait la nature de son mouvement? De quelle distance se déplacerait-il pendant l'intervalle de temps dt (on rappelle que la notation dt signifie simplement intervalle de temps très court)? Dans quelle direction? Tracez ce déplacement sur votre schéma.*

   Il aurait un mouvement rectiligne uniforme (1ère loi de Newton) et se déplacerait de $dl = vdt$ sur la tangente a son orbite.

4. $\star$ *Dans les conditions de la question précédente, de quelle valeur le rayon de l'orbite aurait augmenté pendant dt? On notera cette augmentation dr. En utilisant Pythagore, exprimez dr en fonction de r, v et dt. Sachant que $dr \ll r$, quelle approximation peut-on faire?*

   On a $(r + dr)^2 = (dl)^2 + r^2$, soit $2rdr + (dr)^2 = v^2(dt)^2$, et on peut simplifier si $dr \ll r$ en $2rdr = v^2(dt)^2$.

5. $\star$ *Considérons maintenant l'accélération subie par l'objet dûe à la force $\vec{F}$ pendant dt. Si elle était constante (ce que l'on peut toujours supposer car l'objet n'a pas beaucoup bougé pendant l'intervalle dt très court), quelle distance aurait-elle fait parcourir à l'objet pendant dt (vous aurez besoin de calculer la vitesse gagnée par l'électron à cause de la force $\vec{F}$)? Dans quel sens? On notera cette distance dr'. Dessinez la sur votre schéma.* Si on résoud les équations du mouvement pendant dt, on trouve $v_F = \frac{F}{m}dt$ et $dr' = \frac{F}{2m}(dt)^2$. Le mouvement dû uniquement à la force $\vec{F}$ est radial, dirigé vers le centre (pour que l'objet reste en orbite circulaire, sinon il part à l'infini).

6. $\star$ *Dans la réalité, l'objet est soumis aux deux effets simultanément. Si on veut que l'objet reste sur une orbite circulaire, donc de rayon constant, les deux effets précédents doivent donc se compenser. Quelle relation doit donc être vérifiée?*

   On doit avoir $dr = dr'$ pour que le rayon de l'orbite reste constant.

7. *Déduisez-en la formule reliant force, vitesse et rayon d'une orbite circulaire. Comment cette formule se simplifie-t-elle si on considère la force gravitationnelle ou électromagnétique en $\frac{1}{r^2}$? Déduisez-en une formule reliant dans ce cas accélération, vitesse et rayon.*

   On a $\frac{F}{2m}(dt)^2 = \frac{v^2}{2r}(dt)^2$, soit $\frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}$.

Quand on a une force en $\frac{1}{r^2}$, on a donc toujours $a \propto \frac{v^2}{r}$, et comme $a \propto \frac{Cte}{r^2}$, on a également $v^2 \propto \frac{Cte}{r}$.

11 Planètes et satellites

Considérez le mouvement d'un satellite en rotation autour de la Terre sur une orbite circulaire, à une altitude h de la surface de la Terre. La vitesse du satellite est de norme constante v.

1. *Faites un schéma. Reprśentez qualitativement en plusieurs points sur ce schéma le vecteur champ de gravitation terrestre $\vec{g}$.*

2. *A quelles forces est soumis le satellite? Donnez les formules que vous connaissez.*

   Le satellite est soumis à la force gravitationnelle $F_G = G\frac{M_T m_s}{(R_T+h)^2}$.

3. *Exprimez la période T du satellite en fonction des paramètres de l'énoncé.*

   $T = \frac{longueur\,d'un\,tour}{vitesse} = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}$.

4. $\star$ *Grâce au PFD et à la formule $a = \frac{v^2}{r}$ démontrée dans l'exercice précédent (vérifiez que les conditions d'application sont bien les mêmes), exprimez T en fonction de h.*

   Les conditions sont bien les mêmes que dans l'exercice précédent : il suffit de voir que l'on est sur une orbite circulaire, avec une force radiale ne dépendant que de r.

   On a $a = \frac{F_G}{m_S} = \frac{v^2}{R_T+h}$, donc on peut écrire $v^2 = \frac{GM_T}{R_T+h}$. En prenant la racine on trouve $T = \frac{2\pi(R_T+h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_T}}$.

5. *A quelle altitude doit être placé un satellite pour être géostationnaire (i.e être en permanence au dessus du même point de l'Equateur de la Terre)?*

   Le satellite doit avoir une période de 24h, soit 86400s. On résout:

$$R_T + h = \left(\frac{T\sqrt{GM_T}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$h = \left(\frac{86400\sqrt{4.10^{14}}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - R_T = 4,229.10^7 - 0,64.10^7 = 35890km$$

6. $\star$ *Pourquoi un satellite qui ne serait pas à la verticale de l'Equateur ne peut-il pas être géostationnaire?*

   Un satellite qui ne serait pas à la verticale de l'Equateur ne tournerait pas autour du centre de la Terre s'il restait à la verticale du même point (i.e Paris), mais autour du centre du cercle coupant la Terre à une latitude constante donnée. Or la gravitation l'attire bien vers le centre de la Terre...

Si besoin est on prendra $M_T = 6.10^{24}$ kg, $R_T = 6400$ km et $G = 6,67.10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

12 Mouvement circulaire, conditions initiales et phase

Soient deux mobiles suivant la même trajectoire circulaire de rayon r autour du point O. On suppose que les deux mobiles progressent tous deux à la même vitesse angulaire ω le long de la trajectoire. On note $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les angles indiquant la position de chaque mobile sur le cercle en fonction du temps. A $t = 0$, le mobile 1 est situé à $\theta_1(0) = 0$, le mobile 2 à $\theta_2(0) = \pi$. Les angles sont mesurés à partir d'un diamètre AB horizontal que vous tracerez.

1. *Faites un schéma.* Voir figure 8

2. *Ecrivez l'équation du mouvement de chacun des deux mobiles. Exprimez θ_2 en fonction de θ_1.*

   On a $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \omega$, donc $\theta_1(t) = \omega t$ car $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(t) = \omega t + \pi$ car $\theta_2(0) = \pi$.

   On trouve donc $\theta_2(t) = \theta_1(t) + \pi$.

3. *On veut maintenant utiliser la variable x, projection de θ sur le diamètre AB de la trajectoire circulaire, pour décrire le mouvement des deux mobiles. A l'aide des formules trouvées précédemment pour $\theta_1(t)$*

et $\theta_2(t)$, trouvez les équations du mouvement exprimant x_1 et x_2 en fonction de la variable t.

x est la projection de θ; on a $x = r\cos(\theta)$ dans le cas général, donc $x_1 = r\cos(\omega t)$ et $x_2 = r\cos(\omega t + \pi)$.

4. *Tracez les courbes représentatives de x_1 et x_2 en fonction de t. Que remarquez-vous? On parle d'opposition de phase.*

   On remarque que quand x_1 est maximum, x_2 est minimum. Le décalage de phase de π se traduit sur l'axe réel par une opposition des mouvements.

5. *Répondez aux mêmes questions que précédemment en prenant cette fois ci pour conditions initiales $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$. On parle de quadrature de phase dans ce cas.*

   On obtient $\theta_1(t) = \omega t$, $\theta_2(t) = \omega t + \frac{\pi}{2}$, et $x_1 = r\cos(\omega t)$ et $x_2 = r\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

   On peut dire caractériser le graphe en disant que les extremums d'une variable sont reliés aux valeurs nulles de l'autre. Essayer à partir des deux graphes de leur montrer comment une phase sur un cercle traduit un retard en terme de projection.

6. $\star$ *Calculez maintenant la vitesse $\frac{dx}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ pour le mobile 1. Des 3 quantités x_1, $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, deux sont liées par une relation très simple (i.e sans dérivation!). Lesquelles? Pouvez-vous expliquer physiquement pourquoi? Quel exemple classique cela vous rappelle-t-il?*

   Par dérivation on trouve $\frac{dx_1}{dt} = -r\omega\sin(\omega t)$ et $\frac{d^2x_1}{dt^2} = -r\omega^2\cos(\omega t)$. On peut remarquer que l'accélération et la position sont reliées par la simple relation $x_1 + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$, ce qui devrait leur rappeler l'équation du mouvement d'un ressort. Physiquement, il est nécéssaire que l'accélération et la position de l'objet soient opposées et proportionnelles, pour que le système ait un mouvement périodique et contraint.