TD 1
Analyse dimensionelle et ordres de grandeurs
Cinématique, dérivées et différentielles.

Marc Bailly-Bechet

51PH1ME1-A – Mécanique Physique A – Université Paris 7

1 Equations aux dimensions

On note M la dimension d'une masse, L celle d'une longueur, et T celle du temps.

1. Quelle est la dimension d'une année-lumière? D'un hectare? D'un cheval-vapeur? D'un mile nautique? Attention, on parle ici de dimension au sens unité de mesure, et pas valeur numérique...

   A l'aide de formules connues, retrouvez la dimension:

2. D'une vitesse et d'une accélération.
3. D'une énergie et d'une puissance.
4. D'une force.
5. Du champ de pesanteur $\vec{g}$.
6. $\star$ De la constante de gravitation G.

2 Analyse dimensionnelle : le pendule

Soit un objet de masse m, considéré comme ponctuel, attaché par un fil inélastique de longueur l à un point fixe O dans l'espace. On sait que la seule force extérieure agissant sur le système {fil-masse} est son poids. Construisez, à l'aide des paramètres du problème, un temps caractéristique de cet objet. Répondez sans calcul à la question : Comment variera la période du pendule si la longueur du fil passe de l à $2l$? nl?

3 Ordres de grandeurs

Les exercices suivants ne nécéssitent aucune connaissance préalable. Le but n'est pas de deviner la réponse, mais bien, grâce à quelques hypothèse extrêmement simples à chaque fois, de donner un ordre de grandeur de la valeur réelle. Une réponse à un facteur 10 d'erreur est considérée comme excellente!

1. Estimez le nombre de personnes que l'on peut placer dans la tribune d'un stade de football, sachant que le terrain mesure 100m x 75m.

2. Une manifestation a été mesurée comme faisant 2 km de long. Estimez le nombre de personnes qui y participaient.

3. $\star$ Estimez le nombre d'atomes dans un morceau de craie (voir les valeurs numériques à la fin de l'exercice). Comparez à la population terrestre.

4. $\star$ Une dinde de 1,5 kg est bien cuite en son centre après 20 minutes au four. Estimez le temps nécéssaire pour obtenir le même résultat sur une dinde deux fois plus lourde.

5. $\star$ Sachant qu'environ 2^{40} cellules vous composent, estimez l'ordre de grandeur de la taille d'une cellule[1]. Sachant que la racine de chacun de vos cheveux est unicellulaire, combien de cheveux avez-vous sur la tête?

Nombre d'Avogadro $N_a = 6,02.10^{23}$ *Masse molaire de la craie* $M_{craie} \simeq 20 g.mol^{-1}$

[1] On pourra utiliser l'approximation $2^{10} = 1024 \simeq 10^3$.

4 Dérivées et différentielles

4.1 Remise en route

A l'aide des formules connues, retrouvez la dérivée par rapport à x de :

- x^n
- $\frac{1}{x^n}$; comparez avec la dérivée de x^{-n}
- $\sqrt{x}$; comparez avec la dérivée de $x^{1/2}$
- $ln(4x + 3)$
- $exp(-2x + 3)$
- $\cos(4x - 2)$

4.2 Un peu de mathématiques (non, il n'y a pas d'$\star$)

On rappelle que la définition mathématique de la dérivée de la fonction f en fonction de la variable x est:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quelle est la signification physique de la dérivée? Que représente, dans cette écriture, le numérateur? Le dénominateur? Pourquoi prend-on la limite $h \to 0$?

Une notation souvent employée en physique pour la dérivée de f par rapport à x est

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

.

Sachant que cette écriture est la même que celle vue ci-dessus, que représentent les facteurs df et dx? Quelle condition doit on respecter pour que les deux écritures représentent la même chose?

$\star$ A l'aide de la formule donnée plus haut et de formules trigonométriques connues[2] retrouvez la dérivée de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

[2]Par exemple $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

4.3 Attention aux notations

Dans différents problèmes de physique les variables et les fonctions changent souvent de nom, il faut donc bien distinguer variables et paramètres. Dans l'exercice suivant, les notations en lettres grecques, comme ϕ et π, sont des paramètres, x, y et t étant des variables.

1. Calculez la dérivée de $f(x) = e^x$ par rapport à la variable x.
2. Calculez la dérivée de $g(t) = e^{t+\phi}$ par rapport à la variable t.
3. Calculez la dérivée de $h(t) = \pi^{3\phi+4t}$ par rapport à la variable t.
4. Calculez la dérivée de $k(x,t) = x^{yt+\phi}$ par rapport à la variable x, puis la variable t.

En déduire les différentielles df, dg... de ces fonctions.

5 Intégrales

Calculez les intégrales suivantes (Attention à l'élément d'intégration!) :

1. $\int_0^5 x^2\,dx$
2. $\int_0^\pi sin(\omega t)\,dt$
3. $\int_{\frac{-3}{2}}^0 \sqrt{(2x+3)}\,dx$
4. $\star$ $\int_0^{100} \frac{x}{ln(x)}\,dy$
5. $\star$ $\int_0^e ln(S)\,dS$

6 Mouvement dans le champ de pesanteur

6.1 Chute libre

Soit une masse m en chute libre dans le champ de gravitation terrestre $vecg$, lachée depuis une hauteur l sans vitesse initiale. On néglige les frottements avec l'air.

1. Choisissez un référentiel et des coordonnées dans lesquelles l'étude du système sera aisée.
2. Quelles sont les forces agissant sur la masse? Déduisez-en l'accéleration qu'elle subit.
3. Intégrez les équations du mouvement pour obtenir sa vitesse, puis sa position au cours du temps.
4. Calculez le temps nécéssaire à la masse pour atteindre le sol. Quelle est sa vitesse à ce moment là?

6.2 Mouvement dans le champ de pesanteur avec vitesse initiale

Soit une masse m lancée avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'horizontale depuis une hauteur y_0. Nous allons étudier les caractéristiques du mouvement de ce système, en négligeant les frottements. On se placera dans un référentiel cartésien, avec l'origine O au niveau du sol, à la verticale de l'objet lancé.

1. Faites un schéma. Dessinez sur ce schéma le vecteur champ de gravitation $\vec{g}$ en 3 points.
2. A quoi pourrait correspondre ce système modèle, dans la réalité?
3. Enumérez les forces agissant sur l'objet, projetez les sur les axes x et y, et déduisez en l'expression de son accéleration sur les mêmes axes.
4. Intégrez soigneusement l'accélération sur chaque axe pour obtenir la vitesse du mobile, puis sa position, sur chaque axe, en fonction du temps.

5. $\star$ Calculez la flèche du mouvement, à savoir la position la plus haute obtenue au cours du temps.

6. $\star$ Calculez la portée du mouvement, à savoir la distance parcourue sur l'axe des x avant qque l'objet ne retombe au niveau du sol. Comment cette formule se simplifie-t-elle si y_0 est nul ou négligeable devant les autres paramètres?

7. $\star$ Calculez la différentielle de la portée en fonction d'un petit accroissement de l'angle $d\alpha$.

6.3 Analyse dimensionnelle

Nous allons maintenant résoudre le même problème que ci-dessus, mais grâce à l'analyse dimensionelle. Pour la suite, vous ne ferez que considérer les dimensions physiques des paramètres et des variables, sans procéder à des calculs théoriques. Soit un objet de masse m placé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$, supposé uniforme.

1. Exprimez le temps mis par cet objet pour retomber sur terre quand il est lancé verticalement avec une vitesse v_z. L'orientation de v_z (vers le haut ou le bas) change-t-elle le résultat de votre analyse?

2. Exprimez le temps mis par cet objet pour atteindre le sol à une distance d, s'il est lancé horizontalement avec une vitesse v_x et qu'il suit une trajectoire horizontale.

3. L'objet est lancé à présent avec une vitesse $\vec{v}$, selon une inclinaison d'angle α avec l'horizontale. A l'aide des réponses aux deux questions précédentes, exprimez la distance L à laquelle il retombe sur terre, en fonction des paramètres, et en déduire l'inclinaison α optimale pour une portée maximale.

Comparez les résultats obtenus par l'analyse dimensionelle à ceux obtenus par le calcul théorique. Quel est l'intérêt de ces résultats? Leur défaut?

7 Analyse dimensionnelle : langue étrangère

Lors d'un rêve (ou d'un cauchemar), vous passez un examen de physique. Les rêves étant ce qu'ils sont, les lettres de l'énoncé se sont embrouillées et vous ne parvenez pas à le lire. Vous remarquez juste, sous l'énoncé, 3 grandeurs écrites en italique : *l=28 m,m=1200 kg* et *v=50 km/h.*

La dernière ligne de l'exercice est : F= ... N. Quelle est la réponse que vous écrivez à la place des ... ?

8 De l'art de naviguer (et de composer les vitesses)

Un bateau traverse une rivière de largeur l, avec la vitesse $\vec{v_b}$ par rapport à l'eau. La vitesse du courant, $\vec{v_c}$, par rapport à la rive, est uniforme et parallèle aux rives.

1. Faites un schéma.
2. Qualitativement, quelle va être la trajectoire du bateau, dans le référentiel des rives? Celui du courant? Dessinez les.
3. Quelle est la vitesse du bateau dans chacun des référentiels nommés ci-dessus? La distance parcourue par le bateau?
4. Déduisez-en, dans chacun des deux référentiels, le temps mis par le bateau pour traverser la rivière. La réponse vous surprend-elle?
5. $\star$ Pourriez-vous résoudre ce problème sans calculs, grâce à l'analyse dimensionnelle?

On considère maintenant le même bateau, placé à son point de départ sur la rive. Supposons qu'il veuille rejoindre un embarcadère situé directement en face, sur la rive opposée. La vitesse du bateau est constante et vaut 0,8 m.s^{-1}. La vitesse du courant vaut 0,5 m.s^{-1}.

1. Qualitativement, quel cap le bateau doit suivre (comment doit etre orienté son vecteur vitesse par rapport à l'eau) pour arriver en face sur la rive opposée? Faites un schéma.
2. Calculer l'angle entre la vitesse du bateau et sa trajectoire. Quelle est la vitesse du bateau par rapport aux rives? Combien de temps met-il pour traverser? Comparez avec l'exercice précédent.

9 Le modèle proton–électron

Considérez le système formé par un électron de charge q_e et de masse m_e tournant autour d'un proton de charge q_p et de masse m_p. On considère ce système isolé. On a $m_e = 9,11.10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67^{-27}$ kg, $q_p = -q_e = 1,60.10^{-19}$ C, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98.10^{-9}$m.F^{-1}, $G = 6,67.10^{-11}$ m^{2}kg^{-2}.

1. Faites un schéma.
2. Quelles sont les forces agissant sur l'électron? Donnez les formules.
3. On ne tient généralement compte que d'une seule de ces deux forces dans l'étude du mouvement de l'électron. Laquelle?
4. $\star$ Justifiez votre réponse à la question précédente en comparant l'intensité de ces 2 forces (par exemple en calculant le rapport des deux). Quelle erreur fait-on sur l'accélération de l'électron avec notre approximation? Comparez avec la précision numérique des données de l'énoncé.

10 Justification du lien entre accélération, vitesse et rayon dans un mouvement circulaire

Considérez un mouvement de rotation uniforme: soit un objet de masse m soumis à une force radiale $\vec{F}$, ayant une vitesse $\vec{v}$ tangentielle, en rotation sur une orbite de rayon r. On suppose que la force $\vec{F}$ (dont on précisera que plus tard la nature) est causée par ue source située au centre O de l'orbite.

1. Faites un schéma sur lequel vous représenterez l'objet et son orbite, ainsi que la force $\vec{F}$.
2. Grâce à l'analyse dimensionnelle, trouvez une relation entre accélération, vitesse et rayon de l'orbite. C'est cette relation que nous allons chercher à démontrer par la suite.
3. Si l'objet n'était pas soumis à la force $\vec{F}$, quelle serait la nature de son mouvement? De quelle distance se déplacerait-il pendant l'intervalle de temps dt (on rappelle que la notation dt signifie simplement intervalle de temps très court)? Dans quelle direction? Tracez ce déplacement sur votre schéma.

4. $\star$ Dans les conditions de la question précédente, de quelle valeur le rayon de l'orbite aurait augmenté pendant dt? On notera cette augmentation dr. En utilisant Pythagore, exprimez dr en fonction de r, v et dt. Sachant que $dr \ll r$, quelle approximation peut-on faire?

5. $\star$ Considérons maintenant l'accélération subie par l'objet dûe à la force $\vec{F}$ pendant dt. Si elle était constante (ce que l'on peut toujours supposer car l'objet n'a pas beaucoup bougé pendant l'intervalle dt très court), quelle distance aurait-elle fait parcourir à l'objet pendant dt (vous aurez besoin de calculer la vitesse gagnée par l'électron à cause de la force $\vec{F}$)? Dans quel sens? On notera cette distance dr'. Dessinez la sur votre schéma.

6. $\star$ Dans la réalité, l'objet est soumis aux deux effets simultanément. Si on veut que l'objet reste sur une orbite circulaire, donc de rayon constant, les deux effets précédents doivent donc se compenser. Quelle relation doit donc être vérifiée?

7. Déduisez-en la formule reliant force, vitesse et rayon d'une orbite circulaire. Comment cette formule se simplifie-t-elle si on considère la force gravitationnelle ou électromagnétique en $\frac{1}{r^2}$? Désuisez-en une formule reliant dans ce cas accélération, vitesse et rayon.

11 Planètes et satellites

Considérez le mouvement d'un satellite en rotation autour de la Terre sur une orbite circulaire, à une altitude h de la surface de la Terre. La vitesse du satellite est de norme constante v.

1. Faites un schéma. Reprśentez qualitativement en plusieurs points sur ce schéma le vecteur champ de gravitation terrestre $\vec{g}$.

2. A quelles forces est soumis le satellite? Donnez les formules que vous connaissez.

3. Exprimez la période T du satellite en fonction des paramètres de l'énoncé.

4. $\star$ Grâce au PFD et à la formule $a = \frac{v^2}{r}$ démontrée dans l'exercice précédent (vérifiez que les conditions d'application sont bien les mêmes), exprimez T en fonction de h.

5. A quelle altitude doit être placé un satellite pour être géostationnaire (i.e être en permanence au dessus du même point de l'Equateur de la Terre)?

6. $\star$ Pourquoi un satellite qui ne serait pas à la verticale de l'Equateur ne peut-il pas être géostationnaire?

Si besoin est on prendra $M_T = 6.10^{24}$ kg, $R_T = 6400$ km et $G = 6,67.10^{-11}$ m^{2}kg^{-2}.

12 Mouvement circulaire, conditions initiales et phase

Soient deux mobiles suivant la même trajectoire circulaire de rayon r autour du point O. On suppose que les deux mobiles progressent tous deux à la même vitesse angulaire ω le long de la trajectoire. On note $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les angles indiquant la position de chaque mobile sur le cercle en fonction du temps. A $t = 0$, le mobile 1 est situé à $\theta_1(0) = 0$, le mobile 2 à $\theta_2(0) = \pi$. Les angles sont mesurés à partir d'un diamètre AB horizontal que vous tracerez.

1. Faites un schéma.

2. Ecrivez l'équation du mouvement de chacun des deux mobiles. Exprimez θ_2 en fonction de θ_1.

3. On veut maintenant utiliser la variable x, projection de θ sur le diamètre AB de la trajectoire circulaire, pour décrire le mouvement des deux mobiles. A l'aide des formules trouvées précédemment pour $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, trouvez les équations du mouvement exprimant x_1 et x_2 en fonction de la variable t.

4. Tracez les courbes représentatives de x_1 et x_2 en fonction de t. Que remarquez-vous? On parle d'opposition de phase.

5. Répondez aux mêmes questions que précédemment en prenant cette fois ci pour conditions initiales $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$. On parle de quadrature de phase dans ce cas.

6. $\star$ Calculez maintenant la vitesse $\frac{dx}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ [3] pour le mobile 1. Des 3 quantités x_1, $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, deux sont liées par une relation très simple (i.e sans dérivation!). Lesquelles? Pouvez-vous expliquer physiquement pourquoi? Quel exemple classique cela vous rappelle-t-il?

[3]Ceci est la même notation que $\frac{dx_1}{dt}$, mais si on dérive deux fois. ($\star\star$) Voyez-vous pourquoi?