Mathématiques pour les Sciences de la Vie BIO1004L

Analyse

Marc Bailly-Bechet, très largement inspiré de Sylvain Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

marc.bailly-bechet@univ-lyon1.fr

Quelques ressources pour travailler l'analyse

En ligne :

- http://yallouz.arie.free.fr/index.php
- http://www.academie-en-ligne.fr/Lycee/Ressources.aspx?PREFIXE=AL7MA02
- http://xmaths.free.fr/TS/cours/index.php

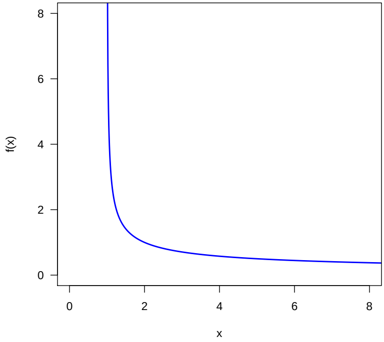
À la BU : 2ème étage, cote 570 et 4ème étage, cote 519.

Table des matières

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f dans un repère cartésien (Ox, Oy) est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$



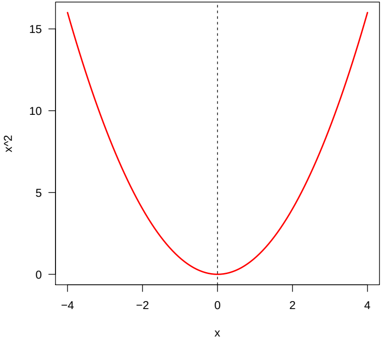
Parité : fonction paire

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *paire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

Exemple : $f(x) = x^2$



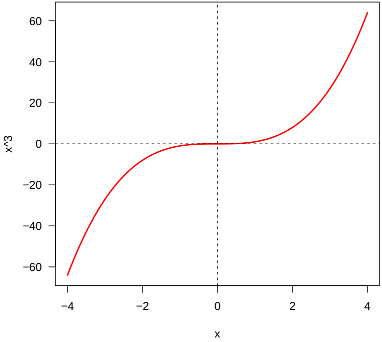
Parité : fonction impaire

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *impaire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

Exemple : $f(x) = x^3$



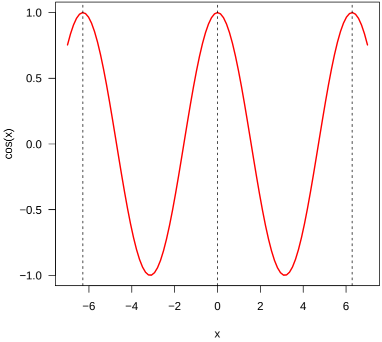
Périodicité

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *périodique de période p* si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (x+p) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(x+p) = f(x)$

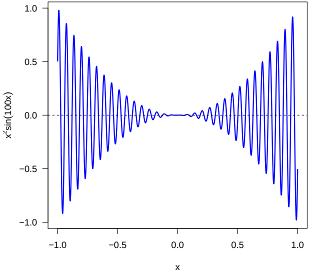
Exemple : $f(x) = \cos x$ est paire et périodique de période 2π



Limite finie en a

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si

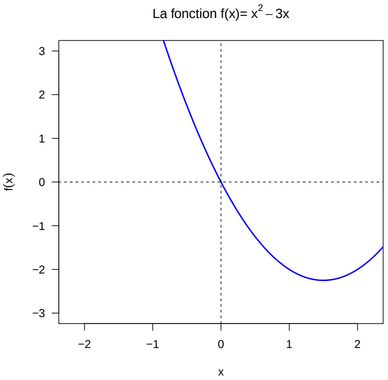
- Si $a \in D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = l.$
- Si $a \notin D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l.$
  On peut prolonger f par continuité en écrivant $f(a) = l$.

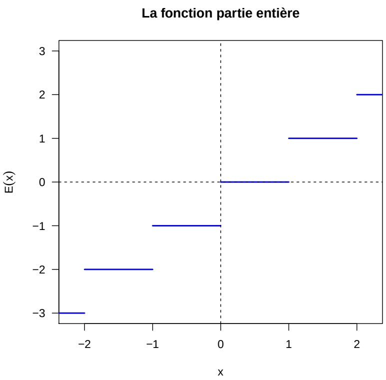


On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Continuité



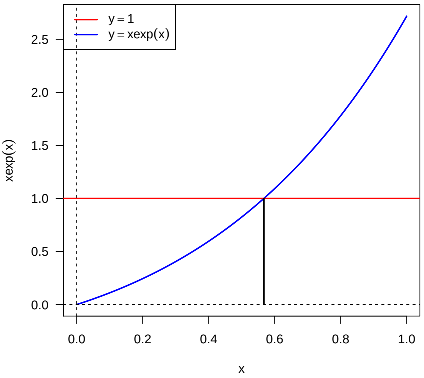


Exemple : $x \mapsto E(x)$ est continue sur les intervalles $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, mais discontinue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

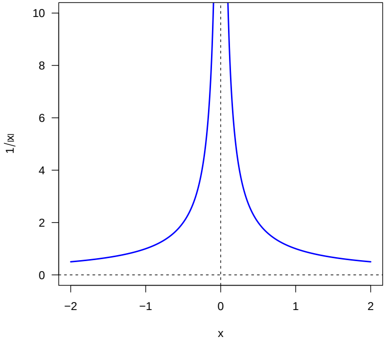
Théorème des valeurs intermédiaires

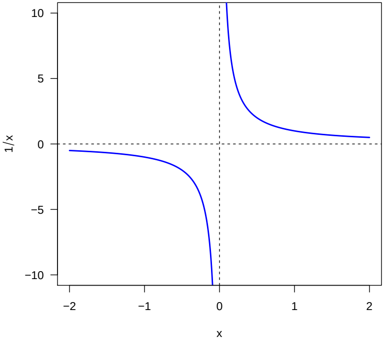
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, tel que $f([a, b]) = [c, d]$.
$\forall y \in [c, d]$, $\exists x \in [a, b], f(x) = y$.

Exemple : $f : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$, existe-t-il $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 1$?



Limite infinie en a





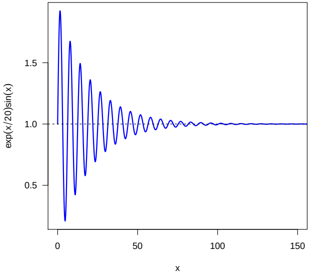
Limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

- Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to l$

Mathématiquement, ceci s'écrit
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R},$
$(x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon])$
On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



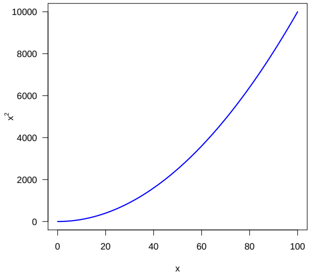
Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$
f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

- $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

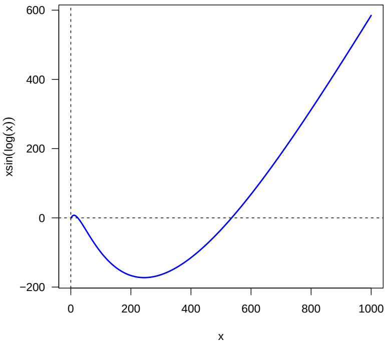
Mathématiquement, cette condition s'écrit
$\forall y > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},$
$(x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$
On note alors

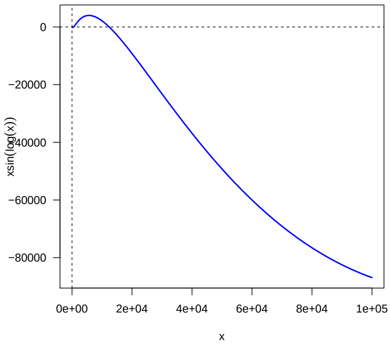
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Méfiez-vous de vos calculatrices

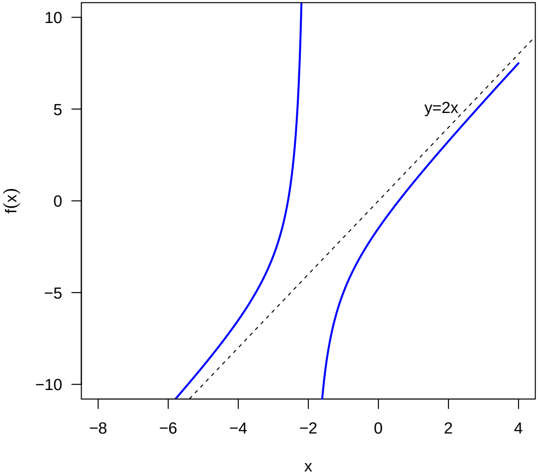
Exemple : La fonction $x \mapsto x\sin(\ln(x))$ n'admet pas de limite en $+\infty$.





Asymptote oblique

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2+4x-3}{x+2}$



Règles sur les limites

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\lim_{x\to a} g\circ f(x)$
$\lambda \neq 0$	$\mu \neq 0$	$\lambda+\mu$	$\lambda\mu$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	0	λ	0	F.I. $\frac{\lambda}{0}$	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
0	$\mu \neq 0$	μ	0	0	$\lim_{x\to 0} g(x)$
0	0	0	0	F.I. $\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0} g(x)$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $0\times\infty$	0	$\lim_{x\to 0} g(x)$
$\pm\infty$	$\mu \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I $0\times\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{0}$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $\infty-\infty$	$\pm\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$

Formes indéterminées

$$\frac{\lambda}{0} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty \qquad \infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Taux d'accroissement et fonction derivée

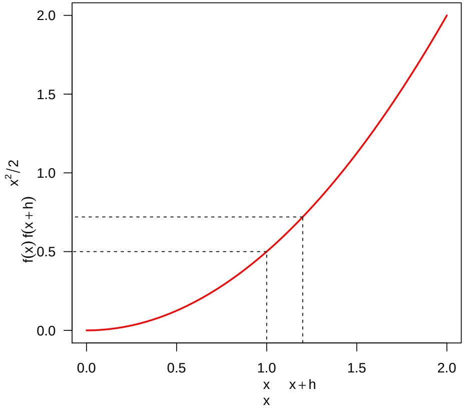
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, $x \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement de f entre x et $x+h$ est

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$$

On note quand elle existe

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Dérivées usuelles

$$f(x) = k \text{ où } k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

Dérivées usuelles : puissances de x

- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = nx^{n-1}$

$$n = 1 \qquad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$n = -1 \qquad f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$n = \frac{1}{2} \qquad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dérivées usuelles : fonctions trigonométriques

$$f(x) = \sin x \ \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Extremum local

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue dérivable sur voisinage de a, telle que

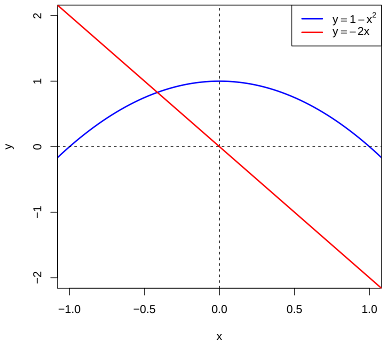
$$f'(a) = 0$$

$$f'(x) \text{ change de signe en } a.$$

Alors f possède un extremum local en a.

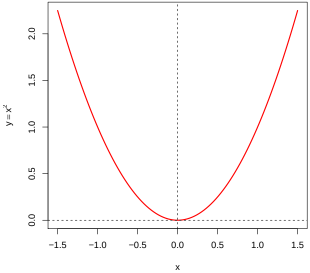
Exemple :

$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$



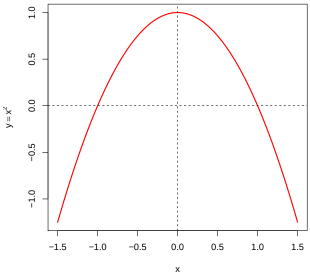
Convexité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$, alors la courbe représentative de f est convexe sur I.
Exemple : $f : x \mapsto x^2$
Moyen mnémotechnique : conVexe



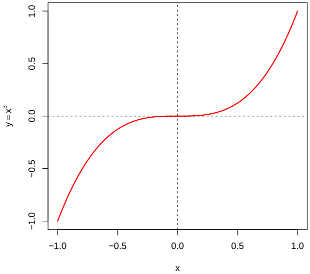
Concavité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I,\ f''(x) < 0$, alors la courbe représentative de f est concave sur I.
Exemple : $f : x \mapsto 1 - x^2$
Moyen mnémotechnique : concAve



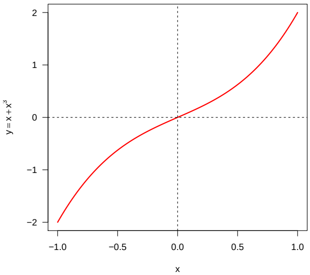
Et si $f''(x) = 0$?

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$ alors la courbe représentative de f n'a ni minimum, ni maximum en a.
Exemple : $f(x) = x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x$



Points d'inflexion

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Si $f''(a) = 0$, alors la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en a.
Exemple : $f(x) = x + x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x$



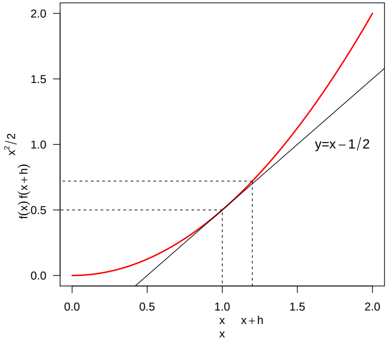
Équation de la tangente

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle dérivable en $x_0 \in D_f$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en x_0 est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0)$$

Exemple : La tangente à la courbe de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ en $x_0 = 1$ a pour équation $y = \frac{1}{2} + 1 \times (x - 1) = x - \frac{1}{2}$.

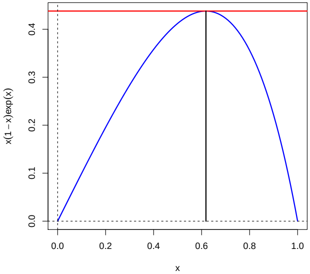


Théorème de Rolle

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $[a, b]$
- telle que $f(a) = f(b)$,

alors $\exists x \in]a, b[, \ f'(x) = 0$.
Exemple : $f : x \mapsto x(1-x)e^x$ sur $[0, 1]$.
Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = 0$.



Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction

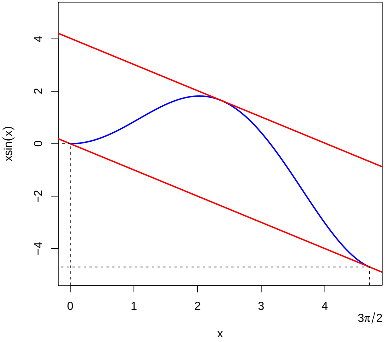
- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $[a, b]$

alors

$$\exists x \in [a, b],\ f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

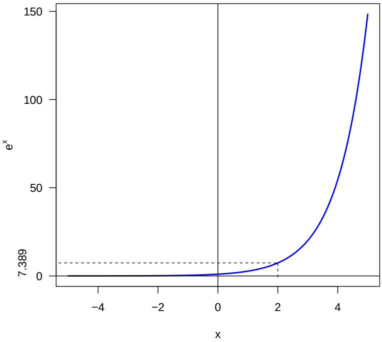
Exemple : $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = -1$.



Exponentielle et logarithme

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = \ln(x)$$



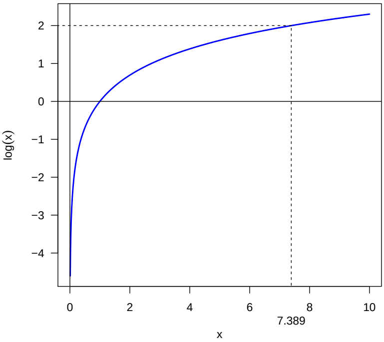
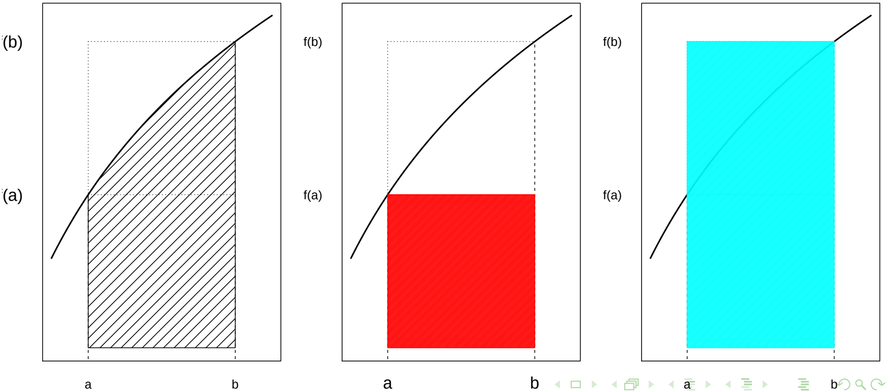


Table des matières

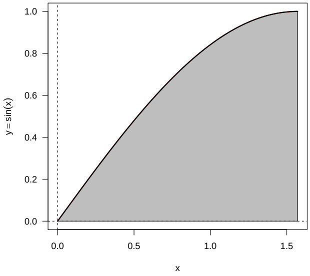
Aire sous une courbe $\mathcal{A}$

$$(b-a)f(a) \leq \mathcal{A} \leq (b-a)f(b)$$



Lien entre intégrale et somme

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

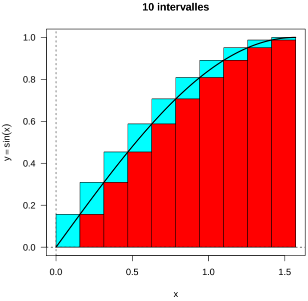


Lien entre intégrale et somme

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k) \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k + \Delta x)$$

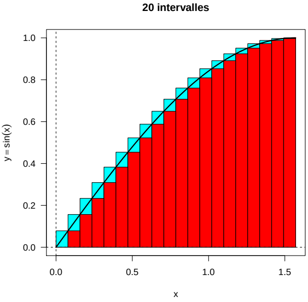


Lien entre intégrale et somme

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k) \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k+\Delta x)$$



Lien entre intégrale et somme

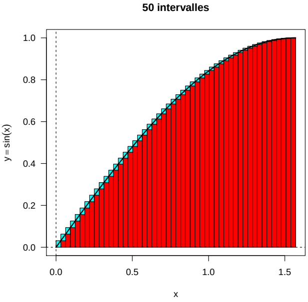
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k) \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k + \Delta x)$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : $C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} C_0 e^{-\lambda t}\,dt = \frac{C_0}{\tau}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{\tau} = \frac{C_0}{\lambda\tau}\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right)$$

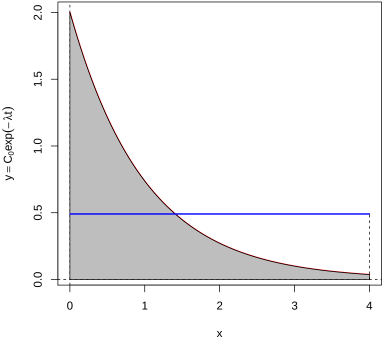


Table des matières

Utilité des modèles en biologie

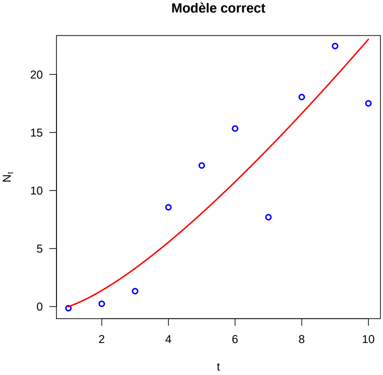
Les modèles sont utiles :

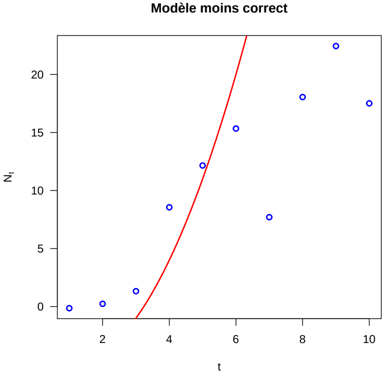
- Tester des hypothèses sans risque (traitement médicamenteux. . .)
- Prédire des performances dans des conditions testables ou non

Les modèles sont limités :

- Modèle mathématique simple $\leftrightarrow$ Modèle non réaliste
- Modèle réaliste $\leftrightarrow$ Paramètres trop nombreux
- Modèle simpliste $\rightsquigarrow$ conclusion irréaliste

Bon ou mauvais modèle ? Comparer avec les données !





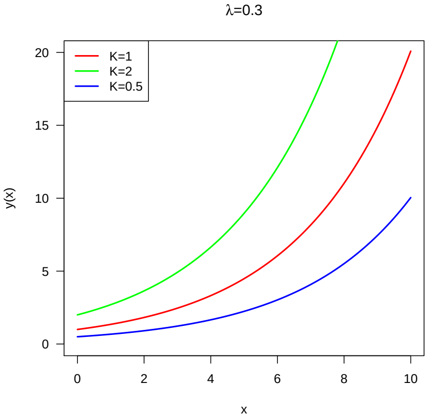
Histoire du calcul différentiel

- La notion d'équation différentielle apparaît à la fin du XVII^{eme} siècle.
- Découverte du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibnitz (1686)
- Premières applications en mécanique ou géométrie
- Au XX^{eme} siècle, nombreuses applications en biologie

Conditions initiales

$$y' = \lambda y$$

$$y(x) = Ke^{\lambda x} \quad K \in \mathbb{R}$$



Un exemple : modèle logistique

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Graphiquement, avec $r > 0$ et $K = 100$: